

基-可数亚紧空间

纪广月

(肇庆工商学院 工商系,广东 肇庆 526020)

摘要: 引入了基-可数亚紧空间的概念,通过研究基-可数亚紧空间与其子空间之间的关系,得出了基-正规的可数亚紧空间是基-可数亚紧空间,并且在既开又闭的有限到一的映射下,证明了基-可数紧具有保持性.
关键词: 可数亚紧空间;基-可数亚紧空间;相对于 X 的基-可数亚紧空间;基-正规
中图分类号: O189.11 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-7162(2012)01-0067-02

Base-countable Metacompact Space

Ji Guang-yue

(Dept of Industry and Commerce, Zhaoqing College of Industry and Commerce, Zhaoqing 526020, China)

Abstract: The notion of base-countable metacompact space is introduced through researching the relation between base-countable metacompact space and its subspace. From the research, it draws the conclusion that base-normal countable metacompact space is base-countable metacompact space, and it proves that open-closed finite-to-1 map preserves base-countable metacompactness.
Key words: countable metacompact space; base-countable metacompact space; base-countable metacompact space relative to X ; base-normality

John E. Porter 在文献[1]中引入了比仿紧空间结构更加复杂也更为重要的基-仿紧空间的概念,并进行了初步研究,获得了基-仿紧空间的一些性质.李克典教授在文献[2]中对基-仿紧空间进行了研究,得出了一个刻画定理.本文运用类似的方法定义了基-可数亚紧空间,并对相关的一些性质进行了研究,获得了一些结果.

1 预备知识

文中所有空间均为 T_2 空间,所有映射均为连续映射. $|A|$ 表示集合 A 的拓扑势. $\omega(X)$ 表示空间 X 的权重. 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的子集族,则 $\cup \mathcal{U} = \cup \{S \mid S \in \mathcal{U}\}$, $\overline{\cup \mathcal{U}} = \{\overline{S} \mid S \in \mathcal{U}\}$. 未作说明的术语参见文献[3-5].

- 定义 1**^[6] 空间 X 称为亚紧的,如果 X 的每一个开覆盖具有点有限的开加细.
- 定义 2** 空间 X 称为基-亚紧的,如果存在 X 的一个基 $\mathcal{B}$,满足 $|\mathcal{B}| = \omega(X)$,且对 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$,都存在 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{U}$ 的点有限的开加细.
- 定义 3**^[6] 空间 X 称为可数亚紧的,如果 X 的

- 每一个可数开覆盖具有点有限的开加细.
- 定义 4** 空间 X 称为基-可数亚紧的,如果存在 X 的一个基 $\mathcal{B}$,满足 $|\mathcal{B}| = \omega(X)$,且对 X 的每一可数开覆盖 $\mathcal{U}$,都存在 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{U}$ 的点有限的开加细.
- 定义 5**^[7] 空间 X 的基底的最小势,称为拓扑势,记为 $\omega(X)$.
- 定义 6** 空间 X 的子集 M 称为相对于 X 是基-可数亚紧的,如果存在 X 的基 $\mathcal{B}$,满足 $|\mathcal{B}| = \omega(X)$,对于 M 在 X 中的每个可数的开覆盖 $\mathcal{U}$ (即 X 中的开集族 $\mathcal{U}$ 覆盖 M),都存在 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$,使得 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathcal{U}$ 的点有限的部分加细,并且 $M \subseteq \cup \mathcal{B}'$.
- 定义 7**^[8] 空间 X 称为基-正规的,如果存在 X 的一个基 $\mathcal{B}$,满足 $|\mathcal{B}| = \omega(X)$,对 X 的每个二元开覆盖 $\{U_0, U_1\}$,都存在一个局部有限的开覆盖 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$,且 $\overline{\mathcal{B}'}$ 加细 $\{U_0, U_1\}$.
- 定义 8**^[9] 集族 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 称为点有限的,如果对每一 $x \in X, x \in U_\alpha$ 仅对有限个 $\alpha \in A$ 成立.
- 定义 9**^[10] 拓扑空间 X 的子集 A 称为 F_σ 集,如果 A 是可数个闭集的并集.
- 从以上定义可以看出:基-可数亚紧空间是可数

亚紧空间;基-亚紧空间是基-可数亚紧空间.

2 主要结果及证明

定理1 基-可数亚紧空间 X 的闭子集相对于 X 是基-可数亚紧的.

证明 设空间 X 是基-可数亚紧空间, M 是 X 的闭子集. $\mathcal{U}$ 为 X 的任一可数开覆盖且 $\mathcal{U}$ 覆盖 M . $\mathcal{B}$ 是 X 的基, $|\mathcal{B}| = \omega(X)$. 则 $(\cup \mathcal{U}) \cup \{X/M\}$ 为 X 的可数开覆盖, 由基-可数基紧性知, $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, 使得 $\mathcal{B}'$ 是 $(\cup \mathcal{U}) \cup \{X/M\}$ 的点有限开加细, 则 $\mathcal{W} = \{B \in \mathcal{B}' : B \cap M \neq \emptyset\}$ 是 $\mathcal{U}$ 点有限部分加细, 并且 $M \subset \cup \mathcal{W}$, 故 M 相对于 X 是基-可数亚紧的.

定理2 设 X 是基-可数亚紧空间, 若 M 是 X 的闭子集, $\omega(X) = \omega(M)$, 则 M 是基-可数亚紧空间.

证明 设 $\mathcal{B}$ 是使得空间 X 是基-可数亚紧空间的基, 显然 $|\mathcal{B}| = \omega(X)$. 则 $\mathcal{B}_M = \{S \cap M : S \in \mathcal{B}\}$ 是 M 的基, 且 $|\mathcal{B}_M| \leq \omega(X) = \omega(M)$, 从而 $|\mathcal{B}_M| = \omega(M)$. 令 $\mathcal{U}_M$ 是子空间 M 的任意可数开覆盖, 对任意 $O_M \in \mathcal{U}_M$, 有 $O_M = O \cap M$, 其中 O 是空间 X 的开集, 所有这样的 O 组成集族 $\mathcal{U}$. 则 $(\cup \mathcal{U}) \cup \{X/M\}$ 是 X 的可数开覆盖, 所以存在点有限的子族 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ 加细 $(\cup \mathcal{U}) \cup \{X/M\}$. 取 $\mathcal{B}'_M = \{S' \cap M : S' \in \mathcal{B}'\}$, 则在 M 中 $\mathcal{B}'_M$ 点有限, $\mathcal{B}'_M \subseteq \mathcal{B}_M$ 且加细 $\mathcal{U}_M$, 所以 M 是基-可数亚紧空间.

定理3 若空间 X 是可数多个闭的相对于 X 基-可数亚紧空间的并, 则 X 是基-可数亚紧空间.

证明 设 $X = \cup_{i < \omega} F_i$, 其中每个 F_i 都是相对于 X 基-可数亚紧的闭子空间, 对任意 $i < \omega$, $\mathcal{B}_i$ 是使得 F_i 是相对于 X 的基-可数亚紧的 X 的基. 记 $\mathcal{S}_0 = \mathcal{B}_0$, $\mathcal{S}_i = \{S/\cup_{j < i} F_j : S \in \mathcal{B}_i\} (i > 0)$, 则容易证明 $\mathcal{S} = \cup_{i < \omega} \mathcal{S}_i$ 是空间 X 的基, 且 $|\mathcal{S}| = \omega(X)$. 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的可数开覆盖, 则对任意的 $i < \omega$, 存在 $\mathcal{B}'_i \subseteq \mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}'_i$ 在 X 中点有限且部分加细 $\mathcal{U}$, 且 $F_i \subseteq \mathcal{B}'_i$. 记 $\mathcal{S}'_0 = \mathcal{B}'_0$, $\mathcal{S}'_i = \{S'/\cup_{j < i} F_j : S' \in \mathcal{B}'_i\} (i > 0)$, $i(x) = \min\{i < \omega, x \in F_i\}$, 则 $\mathcal{S}'$ 即为使 X 是基-可数亚紧空间的基.

取 $x \in X$. 如果 $i(x) = 0$, 则 $x \in F_0$, 所以 x 必属于 $\mathcal{B}'_0$ 中的某个 S' , 这样便有 $x \in S' \in \mathcal{B}'_0 = \mathcal{S}'_0 \subseteq \mathcal{S}'$; 如果 $i(x) > 0$, 则 $x \in F_i(x)$, $x \notin F_j, j < i(x)$, 所以存在 $\mathcal{B}'_{i(x)}$ 中的某个 S'' , 使得 $x \in S''/\cup_{j < i(x)} F_j \in \mathcal{S}'_{i(x)} \subseteq \mathcal{S}'$. 所以 $\mathcal{S}'$ 是 X 的开覆盖. 取 $x \in X$, 则 $x \notin \cup_{j > i(x)} \mathcal{S}'_j$. 当 $j \leq i(x)$ 时, 由 $\mathcal{B}'_j$ 在 X 中点有限, 从而 $\mathcal{S}'_j$ 在 X 中亦点有限, 故 x 只属于 $\cup_{j \leq i(x)} \mathcal{S}'_j$ 中有限多个元. 可见 x 只含于 $\mathcal{S}'$ 中有限多个元中, 所以 $\mathcal{S}'$ 点有限.

推论1 若空间 X 是基-可数亚紧的, M 是 X 的

F_σ 子集, 且 $\omega(X) = \omega(M)$, 则 M 是基-可数亚紧的.

定理4 基正-规的可数亚紧空间是基-可数亚紧空间.

证明 设 $\mathcal{B}$ 是使空间 X 是基-正规空间的基, 显然 $|\mathcal{B}| = \omega(X)$. 令 $\mathcal{U} = \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是空间 X 的一可数开覆盖, 由 X 是可数亚紧空间, 存在点有限的开集族 $\mathcal{W} = \{A_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ 加细 $\mathcal{U}$. 由空间 X 的正规性, 存在 $\mathcal{W}$ 的收缩 $\mathcal{V} = \{C_\alpha : \alpha \in \Omega\}$, 满足对任意的 $\alpha \in \Omega$, 有 $C_\alpha \subseteq \bar{C}_\alpha \subseteq A_\alpha$.

对任意的 $\alpha \in \Omega$, 由 A_α 和 $X/\bar{C}_\alpha$ 均是开集, 且 $\bar{C}_\alpha \subseteq A_\alpha$, 所以 $\{A_\alpha, X/\bar{C}_\alpha\}$ 是 X 的一个二元开覆盖. 由 X 的基-正规性, 存在局部有限的开覆盖 $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}$, 且 $\{S : S \in \mathcal{B}_\alpha\}$ 加细 $\{A_\alpha, X/\bar{C}_\alpha\}$. 令 $\mathcal{B}_\alpha^* = \{S' \in \mathcal{B}_\alpha : \bar{S}' \text{ 加细 } A_\alpha\}$, 则 $C_\alpha \subseteq \cup \mathcal{B}_\alpha^*$. 令 $\mathcal{B}' = \cup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{B}_\alpha^*$, 则 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ 为 $\mathcal{U}$ 的点有限的开加细.

定理5 X 是基-可数亚紧的 Hausdorff 空间, 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是到空间 Y 上的既开又闭的有限到一的映射, 则空间 Y 也是基-可数亚紧的.

证明 设 $\mathcal{B}_X$ 是使 X 为基-可数亚紧空间的基. 记 $\mathcal{B}_Y = \{f(s) : s \in \mathcal{B}_X\}$, f 是开映射蕴含 $\mathcal{B}_Y$ 是空间 Y 的基, 显然 $|\mathcal{B}_Y| \leq |\mathcal{B}_X| = \omega(X)$. $\omega(X) = \omega(Y)$, 故 $|\mathcal{B}_Y| = \omega(Y)$. 令 $\mathcal{U}$ 是 Y 的可数开覆盖, 则 $\{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{U}\}$ 是 X 的可数开覆盖. 所以 $\{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{U}\}$ 有点有限的开加细 $\mathcal{B}'_X \subseteq \mathcal{B}_X$, 记 $\mathcal{B}_Y = \{f(S) : S \in \mathcal{B}'_X\}$, 由 f 是有限到一的, 知 $\mathcal{B}'_Y$ 是 $\mathcal{U}$ 的点有限的开加细. 所以 Y 是基-可数亚紧的.

参考文献:

- [1] John E. PORTER. Base-paracompact spaces [J]. Topology and its Applications, 2003, 128: 145-156.
- [2] 李克典. Base-仿紧空间的一种刻画 [J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2004, 32(3): 106-108.
- [3] Engelking R. General Topology [M]. Warszawa: Polish scientific publishers, 1977.
- [4] 蒲保明. 拓扑学 [M]. 成都: 四川大学出版社, 1985.
- [5] 高国土. 拓扑空间论 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [6] 蒋继光. 一般拓扑学专题选讲 [M]. 成都: 四川教育出版社, 1991.
- [7] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [8] Yamazaki K. Base-normality and product spaces [J]. Topology and its applications, 2005, 148(1-3): 123-142.
- [9] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [10] Kunen K, Vaughan J E. Handbook of Set-theoretic Topology [M]. Amsterdam: North-Holland, 1984.